Упражнения по курсу **Методы оптимизации**
5–6 семестры, 2019/2020 уч. год

1. Привести примеры непрерывных функций, не достигающих своих нижних граней на ограниченном, но незамкнутом множестве; замкнутом, но неограниченном множестве.

2. Доказать, что единичный шар в пространстве $C[a,b]$ не является компактным множеством.

3. Доказать, что пространство $C[a,b]$ со скалярным произведением $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ не является гильбертовым.

4. Доказать, что «параллелепипед» в $L^2(a,b)$ с постоянными границами $\alpha(t)\equiv\alpha<\beta\equiv\beta(t)$ не является компактным множеством.

5. Доказать, что «гильбертов кирпич»

$$U = \left\{ x\in\ell^2 \;\middle|\; |x_n|\leqslant 2^{-n},\ n=1,2,\dots \right\}$$

является компактным множеством в пространстве ℓ^2.

6. Привести пример функции одной переменной, для которой в некоторой точке x справедливо представление

$$f(x+h) = f(x) + f_1\cdot h + f_2\cdot\frac{h^2}{2} + \bar{o}(h^2),$$

но которая не является дважды дифференцируемой в этой точке.

7. Пусть $J(u)\in C^2(H)$. Доказать справедливость формулы конечных приращений

$$\langle J'(u+h) - J'(u),\, g\rangle = \int_0^1 \langle J''(u+th)h,\, g\rangle\,dt \qquad \forall u,h,g\in H.$$

8. Вычислить первые и вторые производные квадратичного функционала в гильбертовом пространстве H :

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle Au,u\rangle_H - \langle f,u\rangle_H, \quad A\in L(H\to H), \quad f\in H.$$

9. Вычислить первые и вторые производные функционала $J(u) = g(\|u\|_H)$, где $g:\ R^1\to R^1$ – дважды дифференцируемая функция. Дифференцируем ли он в точке $u=0$ в случае $g(t)=t$? в случае $g(t)=t^3$?

10. Вычислить градиент функционала

$$J(u) = \int_0^l \rho(x)|y(x;u) - z(x)|^2\,dx$$

в пространстве $L^2(0,l)$, где $y(x)=y(x;u)$ – решение краевой задачи

$$\begin{cases} (k(x)y'(x))' - q(x)y(x) = -u(x), \quad 0<x<l, \\ y(0)=0, \qquad y'(l)=0, \end{cases}$$

$k(x)\geqslant k_0>0,\ q(x)\geqslant 0,\ \rho(x)\geqslant 0$ – заданные функции.

11. Вычислить градиент функционала $J(u) = \sum\limits_{i=1}^{N-1} |y_i(u) - z_i|^2 h$ в пространстве R^{N-1} сеточных функций $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{N-1})$ со скалярным произведением $\langle u, v\rangle_= \sum\limits_{i=1}^{N-1} u_i v_i\, h$. Здесь $h > 0$ – шаг разностной сетки, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{N-1})$ – заданная дискретная траектория, а $y_i = y_i(u)$ – решение разностной схемы

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} - y_i = -u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ \qquad\qquad y_0 = 0, \qquad y_N = 0. \end{cases}$$

12. В пространстве $L^2(0, l)$ найти первые производные квадратичных функционалов

$$J(u) = \iint\limits_Q |y(t, x; u) - f(t, x)|^2 \, dt\, dx \quad \text{и} \quad J(u) = \int_0^l |y(T, x; u) - f(x)|^2 \, dx,$$

заданных на решениях $y = y(t, x; u)$ третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{gathered} y_t = y_{xx}, \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times (0, l), \\ -y_x + \sigma_0 y \,|_{\,x=0} = 0, \quad y_x + \sigma_1 y \,|_{\,x=0} = 0, \quad 0 < t < T, \\ y \,|_{\,t=0} = u(x), \quad 0 < x < l \quad (\sigma_0 > 0,\ \sigma_1 > 0)\,. \end{gathered}$$

13. Пусть H – гильбертово пространство, L – его замкнутое подпространство. Доказать, что оператор метрического проектирования из H на L является линейным ограниченным самосопряженным оператором (оператором ортогонального проектирования из H на L).

14. Пусть x_0 – фиксированный элемент из H, $x_0 + L$ – соответствующее замкнутое линейное аффинное многообразие. Доказать, что тогда $p = pr_{x_0+L} h$ в том и только в том случае, когда

$$p \in x_0 + L, \quad \langle p - h, \ell\rangle_H = 0 \quad \forall \ell \in L.$$

15. Вычислить проекции точек на гиперплоскость $\{u \in H \,|\, \langle c, u\rangle_H = \beta\}$ в гильбертовом пространстве H и на параллелепипед $\{u = (u_1, ..., u_n) \in R^n \,|\, \alpha_i \leqslant u_i \leqslant \beta_i,\ i = 1, ..., n\}$ в R^n.

16. Выписать явное выражение для шага α_k метода скорейшего спуска в задаче минимизации квадратичного функционала $J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle_H - \langle f, u\rangle_H$ $(A^* = A \geqslant 0)$.

17. Найти все угловые точки множества $U = \{u \in R^4 \,|\, u \geqslant 0,\ Au = b\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и исследовать их на невырожденность.

18. Доказательство теоремы отделимости точки от непустого выпуклого множества в R^n.

19. Пусть $A \in L(H \to F)$, пространства H, F – гильбертовы. Доказать, что тогда $F = \overline{\mathrm{Im} A} \oplus \ker A^*$, $H = \overline{\mathrm{Im} A^*} \oplus \ker A$.

20. Пусть H – гильбертово пространство, отображение $G(u) = (g_1(u), ..., g_n(u)) : H \to R^n$ дифференцируемо по Фреше и $G'(u) = (g_1'(u), ..., g_n'(u)) \in L(H \to R^n)$ – его первая производная. Доказать, что сопряженный к $G'(u)$ оператор $(G'(u))^* \in L(R^n \to H)$ действует по правилу

$$(G'(u))^* \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, g_i'(u), \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n.$$

21. Множество M в R^2 задано уравнением $M = \{x = (x_1, x_2) | F(x) = 0\}$, где $F(x) = x_1^2 - x_2^4$. Найти множество $T_0 M$ касательных векторов к M в точке $0 = (0, 0)$ и ядро $\mathrm{Ker} F'(0)$. Верно ли равенство $T_0 M = \mathrm{Ker} F'(0)$?

22. С помощью правила множителей Лагранжа решить задачу минимизации квадратичного функционала $J(u) = \langle Au, u\rangle_H$ на сфере $\|u\|_H = 1$ в гильбертовом пространстве H. Здесь $A \in L(H \to H),\ A = A^* \geqslant 0$ (если $\dim H = \infty$, существование решения предполагается).

23. Построить вторую двойственную задачу к канонической задаче линейного программирования и показать, что она совпадает с исходной задачей.

24. Построить двойственную задачу к задаче минимизации

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \to \inf, \quad Au = f,$$

где $A \in L(H \to R^n),\ f \in R^n,\ H$ – гильбертово пространство.

25. Решить задачу оптимального управления

$$J(u) = \int_0^T (-x(t) + u^2(t))\,dt \to \inf,$$
$$x'(t) = u(t),\ 0 < t < T,\ x(0) = x_0; \quad |u(t)| \leqslant a.$$

Рассмотреть случаи а) $T > 2a > 0$ и б) $0 < T < 2a$.

26. Показать, что функционал $J(u) = \int_0^T x^2(t)\,dt$, где $x(t) = x(t; u)$ – решение задачи Коши

$$x'(t) = u(t), \qquad 0 < t < T, \qquad x(0) = 0,$$

не является сильно выпуклым в пространстве $L^2(0, T)$.

27. В пространстве R^2 найти нормальное решение u_* системы линейных уравнений $Au = f$, где $u = (u_1, u_2),\ Au = (2u_1 + u_2,\, 2u_1 + u_2),\ f = (5, 5)$. Для системы с приближенным оператором $\widetilde{A}u = (2u_1 + u_2,\, (2 - \delta)u_1 + u_2),\ \delta > 0$, найти экстремали

$$\widetilde{u} = \operatorname*{argmin}_{u \in R^2} T_\alpha(u)$$

функционала Тихонова $T_\alpha(u) = \|\widetilde{A}u - f\|^2 + \alpha\|u\|^2$ и исследовать их на сходимость к u_* при $\delta \to 0$ и значениях параметра регуляризации а) $\alpha = 0$ (регуляризация не проводится), б) $\alpha = \delta$.

Задания из письменных контрольных работ, проведённых в апреле 2020 г., размещены на сайте в файлах solutions work 1 – solutions work 5